JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Multiplikation genom rektangulära modeller

En litteraturstudie om hur rektangulära modeller kan synliggöra multiplikativa strukturer

KURS	*Examensarbete 1 för grundlärare F-3, 15 hp*
PROGRAM	*Grundlärarprogrammet med inriktning på arbete i förskoleklass och grundskolans årskurs 1–3*
FÖRFATTARE	*Iosifina Kouroutsidou, Matilda Malm*
EXAMINATOR	*Anna Sjödahl*
TERMIN	*VT26*

JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Examensarbete 1 för grundlärare F-3, 15 hp
Grundlärarprogrammet med inriktning mot förskoleklass och grundskolans årskurs 1–3
VT26

SAMMANFATTNING

Iosifina Kouroutsidou, Matilda Malm

Multiplikation genom rektangulära modeller – En litteraturstudie om hur rektangulära modeller kan synliggöra multiplikativa strukturer

Multiplication through rectangular models – A literature study about how rectangular models make multiplicative structures visible

Antal sidor: 24

Multiplikation är känd som en vanlig svårighet i skolan och i många fall visar sig elevers kunskapsnivå vara otillräcklig. För att uppnå en djupare förståelse för multiplikation kan en tvådimensionell modell användas. Syftet med studien är att beskriva hur forskning framställer en tvådimensionell modell för att synliggöra multiplikativa strukturer och utveckla elevers multiplikativa resonemang. Analyserat material har hittats genom sökningar i olika databaser. Materialet består av internationella vetenskapliga artiklar som är skrivna på engelska. Resultatet visar att den tvådimensionella modellen kan synliggöra olika multiplikativa strukturer däribland distributivitet och kommutativitet. Resultatet visar också att modellen inte nödvändigtvis fråntar elever möjligheten att tänka additivt.

Nyckelord: tvådimensionell modell, distributivitet, kommutativitet, multiplikativ, additiv

---

Innehållsförteckning

1. Inledning 1
2. Syfte och frågeställningar 2
3. Bakgrund 3
3.1. Multiplikation i en eller två dimensioner 3
3.1.1 Olika tvådimensionella modeller 3
3.4 Aritmetiska lagar 4
3.2 Sammansatta enheter 5
3.2.1 Tal som kombination av enheter 5
3.2.2 Multiplikation som kombination av enheter 5
3.3 Multiplikativa resonemang 6
4. Metod 7
4.1 Informationssökning 7
4.2 Urval 7
4.3 Materialanalys 8
4.4 Etik 9
5. Resultat 11
5.1 Multiplikativa strukturer 11
5.1.1 Faktorer och produkt 11
5.1.2 Distributivitet 12
5.1.3 Kommutativitet 13
5.2 Elevers användningsstrategier 15
5.2.1 Additiva strategier 15
5.2.2 Multiplikativa strategier 16
6. Diskussion 17
6.1 Metoddiskussion 17
6.2 Resultatdiskussion 18

6.2.1 Multiplikativa resonemang ... 18

6.2.2 Kommutativitet eller distributivitet ... 19

6.2.3 Associativitet ... 20

6.3 Undervisningsimplikationer ... 20

6.4 Vidare forskning ... 21

Referenslista ... 22

Bilagor ... 1

1. Inledning

Multiplikation kan vara svårt och forskning visar att elever ofta stöter på svårigheter när grundkunskaperna inte räcker till. Både Larsson (2016, s. 59–61) och Smith (2018, s.177) redovisar resultat som synliggör att elever övergeneraliserar sina kunskaper eller att deras kunskaper kring multiplikation helt enkelt inte är tillräckliga. Jäder (2015) beskriver att svårigheter i matematiken kan grundas i lärande som har fokuserat på utantillinlärning utan att ge eleverna möjlighet att bygga en förståelse (s.7).

För att lära sig förstå och beräkna multiplikation kan flera olika representationsmodeller användas. En av de modeller som nämns i forskning är en tvådimensionell modell som består av rader och kolumner (Larsson, 2016, s.10; Smith, 2018, s.172). Matney och Daugherty (2013, s.150) samt Jacob och Mulligan (2014, s.3) förklarar hur en tvådimensionell representation i form av prickade rutnät kan användas som en modell för uträkningar och för att representera multiplikation. För att verkligen förstå multiplikation och att kunna resonera multiplikativt förklarar Larsson (2016) att eleverna behöver få se olika delar av multiplikationen, bland annat de aritmetiska lagarna (s.30).

I kursplanen för matematik (Skolverket, 2025) står det att eleverna ska utveckla sin förmåga att välja lämpliga metoder för sina uträkningar (s.55). Genom att undersöka vad forskning säger kan denna studie bidra till en förståelse för de strukturer som eventuellt är synliga inom modellen och modellens möjlighet till att påverka elevers multiplikativa resonemang.

Studien består av peer review-granskade vetenskapliga texter som valts ut utifrån inkluderings- och exkluderingskriterier och sedan analyserats utifrån funna teman. Kriterier beskrivs i studiens metodavsnitt samt hur informationssökningen har gått till.

2. Syfte och frågeställningar

Syftet med denna studie är att beskriva hur forskning framställer en tvådimensionell representation av multiplikation för att utveckla elevers multiplikativa resonemang i de tidiga skolåren.

För att uppnå syftet kommer följande frågeställningar besvaras:

- Vilka multiplikativa strukturer skriver forskning fram som möjliga att förstå utifrån en tvådimensionell modell?
- Vilka strategier och resonemang använder elever när de möter multiplikativa uppgifter utifrån en tvådimensionell representation?

3. Bakgrund

I detta avsnitt presenteras och beskrivs begrepp och bakgrundskunskap inför resultatdelen. Begreppen berör olika aspekter av multiplikation.

3.1. Multiplikation i en eller två dimensioner

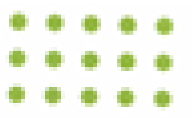
Ett vanligt sätt att representera multiplikation på är genom upprepad addition av lika grupper på en tallinje (Larsson, 2024, s.26 & McIntoch, 2020, s.70). Att visa multiplikation som en upprepad addition utifrån tallinjen är korrekt och det visar den endimensionella strukturen. Andra representationsformer kan synliggöra hur multiplikation också har en tvådimensionell struktur (McIntosh, 2020, s.70). Några av representationerna är prickade rutnät och rektangulära representationer i form av rader och kolumner (Harries och Barmby, 2007 s.39 & McIntosh, 2020, s.70 & Skodras, 2016. S.16). Dessa representationer kan leda till djupare förståelse genom att de visar två tal som multipliceras och representerar två oberoende dimensioner. Representationerna kan möjliggöra multiplikation med rationella tal som kan skrivas i bråk- och decimalform. De representationerna som har en tvådimensionell struktur kan dessutom synliggöra de aritmetiska lagarna (McIntosh, 2020, s.70).

3.1.1 Olika tvådimensionella modeller

I studien kommer flera olika modeller nämnas. De är alla tvådimensionella men utformade på olika sätt. Nedanför presenteras de mest förekommande modellerna.

Figur 1

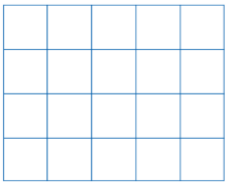
Prickat rutnät som visar multiplikationen 3*5.



Kommentar. Från “Förstå och använda tal - en handbok" av McIntosh, A. (2020), s.76.

Figur 2

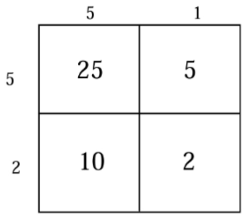
Rutnät med rader och kolumner som representerar multiplikationen 4*5



Kommentar. Från “Muffles’truffles - undervisning i multiplikation med systematiskt varierande exempel” av Skodras, C. (2016). https://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1319_16_2.pdf

Figur 3

Rektangulär modell som synliggör multiplikationen 7 x 6 genom att fördela multiplikationen. Utanför rektangeln skrivs de uppdelade faktorerna och inuti rutorna skrivs produkten. Denna modell synliggör den distributiva lagen.



Kommentar. Från “Representing an understanding multiplication” av Harries. T, Barmby, P. (2007). https://doi.org/10.1080/14794800008520169

3.4 Aritmetiska lagar

Inom matematiken finns det tre centrala räknelagar, den associativa lagen, distributiva lagen och den kommutativa lagen. Dessa är betydelsefulla och användbara för eleverna och används intuitivt även om eleverna ännu inte har blivit medvetna om lagen. Alla lagarna berör multiplikation men används i olika sammanhang (McIntosh, 2020, s.72).

Den associativa lagen säger att vid en multiplikation eller addition med fler än 2 tal spelar ordningen på vilken operation som räknas ut först inte någon roll (Carpenter, 2003, s.108). Det kan skrivas som:

(ab)c = a(bc) i multiplikation (Kiselman & Mouwitz, 2008, s.87).

Ordet distributiv betyder ”som fördelar” och lagen säger att multiplikationen går att fördela över additionen (Kiselman & Mouwitz, 2008, s.88). Den distributiva lagen innebär att man kan dela upp en multiplikation, till exempel kan 3 x (4 + 5) räknas som 3 x 4 + 3 x 5. I högre talområden kan elever ha en nytta av att förstå den distributiva lagen då operationer som 18 x 12 kan fördelas på olika sätt, till exempel som 18 x 10 + 18 x 2 (Larsson, 2015, s.10).

Ordet kommutativ kommer från latin och betyder som kan bytas om. Den kommutativa lagen är en lag som gäller för multiplikation och addition och innebär att ordningen på termerna som adderas eller multipliceras inte spelar någon roll. Lagen kan skrivas som:

ab = ba för multiplikation (Kiselman & Mouwitz, 2008, s.89–90).

3.2 Sammansatta enheter

Sammansatta enheter är ett begrepp som används för att beskriva en viktig del i förståelsen för multiplikation. Sammansatta enheter kan beskrivas på olika sätt men övergripande innefattar det förmågan att se och räkna med grupper och inte individuella objekt.

3.2.1 Tal som kombination av enheter

McIntosh (2020) förklarar att förmågan att se en grupp föremål som en enhet är grundläggande för multiplikation (s.73). I fyra påsar med tolv bullar i varje, representerar varje påse både en påse och tolv bullar samtidigt (Larsson, 2015, s.9). Denna grupp föremål kan behandlas som en enhet trots att den består av flera föremål, vilket kan vara en svårighet för elever (McIntosh, 2020, s.73). Larsson (2016) skriver om sammansatta enheter och förklarar likt McIntosh att det delvis handlar om förmågan att förstå att en låda med 12 pärlor representerar både talet 1 och talet 12. Larsson förklarar ytterligare att det handlar om att förstå att produkten är en sammansatt enhet som består av faktorer, vilka i sin tur bildar sammansatta enheter av tal. En sammansatt enhet och förmågan att räkna med dessa i multiplikation innebär således att i exemplet 3 x 4 kunna se 4 bilar per låda som en enhet som upprepas tre gånger istället för att varje bil räknas tills alla är räknade (s.4–5).

3.2.2 Multiplikation som kombination av enheter

Larsson (2024) förklarar multiplikation som ett tvådimensionellt räknesätt jämfört med addition som är endimensionellt. För att förstå skillnaden mellan de två räknesätten kan man resonera kring enheterna (s.25). Exempel på hur den additiva strukturen ser annorlunda ut jämfört med den multiplikativa är vid hantering av storheter (Larsson, 2015, s.9). Den additiva hanterar bara en enhet, vi adderar äpplen med äpplen eller kronor med kronor. Den multiplikativa hanterar flera enheter samtidigt, till exempel när vi multiplicerar två längdenheter blir resultatet areaenheter. Ett annat exempel är en vara som köps per kilopris. När vi multiplicerar vikten på varan med kilopriset får vi priset på varan. I de endimensionella räknesätten bevaras enheten medan i de tvådimensionella räknesätten transformeras enheten (Larsson, 2024, s.25, Larsson, 2015, s.9).

3.3 Multiplikativa resonemang

Matematiska resonemang innefattar förmågan att argumentera för val av metod, räknesätt eller formel. Eleverna ska med ord beskriva och förklara sina uträkningar och göra kopplingar och beskriva samband inom matematiken (Skolverket, 2022, s.7). Lawton (1994) beskriver hur resonemang är en viktig del i elevers lärande. För att de ska lära sig behöver eleverna få dra kopplingar mellan koncept och ifrågasätta och jämföra alternativa förklaringar (s.160–161). Ord som är viktiga att använda i sådana resonemang är *om, och, då* samt *därför* (s.163). När eleverna gör detta med stöd av lärare får de brottas med tankar kring olika alternativ och bevis för att kunna dra slutsatser (s.174). När elever får resonera och förklara varför deras uträkning fungerar genom att argumentera för strategins samband med olika representationsformer och dess kopplingar till aritmetiska lagar menar Larsson (2016) att det kan ses som ett tecken på djup förståelse för multiplikation (s.30).

Multiplikativa resonemang omfattar förmågan att resonera kring uträkningar med en visad förståelse för att talen är sammansatta enheter, det vill säga att talen representerar både flera tal samtidigt och är kopplat till en enhet (Tzur et al., 2013, s.87-88; Larsson, 2016, s.4-5).

Begreppet multiplikativa resonemang kommer i denna studie omfatta förmågan att räkna med flera sammansatta enheter, förmågan att argumentera för sin uträkning i relation till den använda representationsformen samt förmågan att använda redan känd kunskap för att göra kopplingar och dra slutsatser kring ny information i multiplikativa sammanhang.

4. Metod

I detta avsnitt redogör vi för hur litteraturen till studien har tagits fram och hur den har bearbetats. Sökning, urval och analys presenteras under tre separata rubriker, därefter presenteras sökningsprocessen i en tabell.

4.1 Informationssökning

För informationssökningen användes databaserna Education Resources Information Center (ERIC), PsycInfo, Scopus och Google Scholar för att få en så stor träffmängd som möjligt. För att fastställa sökorden gjordes flera testsökningar. Nya sökord fångades upp via nyckelord som var återkommande. Dessa testsökningar resulterade i sökorden: multiplication, array, multiplicative reasoning, distributive, rectangular, arithmetic propert*, commutative property, distributive property, visual och representation. De kombinerades på olika sätt (se söktabell nedan). Vid varje sökning fanns multiplication eller multiplicative reasoning med. Även sökordet array användes vid fem av sex sökningar eftersom det är ett välanvänt ord inom forskningsområdet. Fler sökningar gjordes som fokuserade på associativitet men ingen artikel som omfattades av inkluderigskriterierna (se kriterier under rubrik 4.2) påträffades.

I ERIC och PsycInfo användes avgränsningen peer review för alla sökningar. I Google Scholar och Scopus finns inte möjligheten att avgränsa för peer review. Artiklarna som har hittats genom de databaserna har genom kompletterade sökningar (exempelvis på tidskriftens hemsida) kontrollerats för att se till att artiklarna var peer review granskade. I ERIC, PyicInfo och Scopus gjordes manuella årsavgränsningar för artiklar publicerade före 2015. I Google Scholar valde vi att avgränsa för att få artiklar endast publicerade sedan 2022. Eftersom träffmängden i Google Scholar är väldigt stor kunde vi på detta sätt minska träffmängden och fokusera enbart på den senaste forskningen som presenterar forskningsläget.

4.2 Urval

Efter alla sökningar var det totala antalet träffar 850. Den största träffmängden var i Google Scholar med 736 resultat. För att avgränsa valde vi att endast titta på artiklarna från de fyra första sidorna vilket resulterade i totalt 40 artiklar. Efter den avgränsningen hade vi 154 träffar som granskades utifrån inkluderings- och exkluderingskriterier.

Ett exkluderingskriterie var avgränsningen för årtal och denna gjordes manuellt. Efter att artiklar som publicerats tidigare än 2015 exkluderats fanns 113 artiklar att granska.

De inkluderingskriterier som applicerades på artiklarna var att det i titel och abstract skulle vara fokus på multiplikation genom en tvådimensionell visuell representation ofta benämnd som array. I abstract skulle den tvådimensionella representationen nämnas antingen i artikelns syfte och fokusområde eller i resultatet tillsammans med någon av de aritmetiska lagarna eller tydliga förklaringar av elevers användningsstrategier.

De artiklar som genomgått urvalet lästes i sin helhet och kontrollerades så att innehållet i artikeln genomgående behandlade tvådimensionella representationer av multiplikation. Det slutgiltiga urvalet från databassökningarna landade på 12 artiklar.

Efter urvalet fann vi en artikel som refererats till i många av våra valda artiklar. Då den omfattas av inkluderingskriterierna och ligger till grund till mycket tidigare forskning valde vi att ta med artikeln trots att den är publicerad tidigare än 2015. Det slutgiltiga antalet artiklar hamnade därför på 13 artiklar. Urvalsprocessen presenteras i ett diagram där antalet inkluderade och exkluderade artiklar redogörs för utifrån de olika stegen i urvalsprocessen (se bilaga 1).

4.3 Materialanalys

Analysen av materialet genomfördes genom att läsa och sammanfatta alla artiklar. Artiklarnas resultat, syfte och identifierade teman sammanställdes i en tabell (se bilaga 2). För att analysera texterna utgick vi från analysfrågor som belyser vilka delar av multiplikationen som synliggörs och hur, däribland aritmetiska lagar. Teman inom elevers strategier och resonemang vid användning av en tvådimensionell modell var även det en utgångspunkt för analysen. Inga artiklar nämner alla delar vilket krävde olika analysfrågor. Analysfråga 1 kopplar till frågeställning 1 och gav möjlighet att fokusera på de multiplikativa strukturerna. Utifrån analysfråga 1 tittade vi exempelvis efter beskrivningar på hur den distributiva lagen kan visas genom uppdelningar i ett prickat rutnät. Denna fråga användes då vi i ett tidigt skede upptäckte att de aritmetiska lagarna ofta nämndes i artiklar som behandlade en tvådimensionell modell för multiplikation. Analysfråga 2 kopplas istället till frågeställning 2 och fokuserar på elevstrategier och resonemang. Utifrån analysfråga 2 tittade vi exempelvis efter elevexempel som ackompanjerades med samtalsloggar för att se hur eleven redogjorde för sin uträkning/användning av en tvådimensionell modell. Tillsammans kunde dessa frågor utgöra en grund för att diskutera möjligheter till multiplikativa resonemang utifrån en tvådimensionell modell. Artiklarna kategoriserades utifrån identifierade teman och därefter sammanställdes resultatet.

Analysfråga 1. Hur omnämner artikeln någon/några av de aritmetiska lagarna eller andra multiplikativa strukturer i relation till den tvådimensionella modellen?

Analysfråga 2. Hur resonerar eleverna när de använder en tvådimensionell modell?

4.4 Etik

När en litteraturstudie ska genomföras behövs vissa etiska överväganden (Eriksson Barajas et al, 2013, s.69). Ett övervägande som är viktigt är att vid analys av resultat inte vinkla resultatet på ett sådant sätt som stödjer en tes. Studier som talar emot en frågeställning bör därför också redovisas (Gustafsson, Hermerén, Petersson, 2005, s.16). Ytterligare en etisk aspekt är transparens och som Vetenskapsrådet (2024) benämner det, rätten till insyn. Det är viktigt att kunna redovisa hur forskning har genomförts för att möjliggöra granskning (s.85). För oss har detta inneburit noggranna noteringar efter alla sökningar, framtagande av analysfrågor och en diskussion kring metodval för att studien ska vara reproducerbar.

Tabell 1

Översikt över urvalsprocessen.

Databas och datum	Sökord	Avgränsningar	Antal träffar	Kvalificerade artiklar
ERIC 2026-01-20 2026-01-30	noft(multiplication) AND noft(array)	Peer Review	56	5
ERIC 2026-01-20	noft("multiplicative reasoning") AND noft(array)	Peer Review	4	2

Google Scholar 2026-01-26	”multiplication” AND ”distributive” AND ”array” OR ”rectangular”	Sedan 2022	40* *den egentliga träffmängden var 736	2
Scopus 2026-01-26	“array” AND “multiplication” AND “multiplicative thinking”		47	1
ERIC 2026-02-11	noft("arithmetic propert*" OR "distributive property" OR "commutative property") AND noft(multiplication) AND noft(visual OR representation)	Peer review	6 2 från 2015	1
Psycinfo 2026-02-11	noft(multiplication) AND noft(commutativity OR distributivity) AND noft(array OR rectangular)	Peer review	1	1

5. Resultat

I resultatet framställs analysen av litteraturen utifrån frågeställningarna. Under rubrik 5.1 presenteras innehåll som besvarar frågeställning 1 vilken rör de multiplikativa strukturerna. Under rubrik 5.2 presenteras innehåll som besvarar frågeställning 2 om elevernas användningsstrategier. Resultatet visar att flera multiplikativa strukturer går att arbeta med utifrån en tvådimensionell modell men att elever inte alltid själva kan se dessa strukturer. Detta gör att elever använder olika strategier som inte alltid bygger på de multiplikativa strukturerna när de utför beräkningar i en tvådimensionell modell.

5.1 Multiplikativa strukturer

Forskningen lyfter fram flera multiplikativa strukturer som är framträdande i en tvådimensionell modell. Strukturerna som nämns är faktorerna och produkten, distributivitet och kommutativitet. Detta är de tre identifierade temana utifrån analysfråga 1 och de presenteras nedan under vardera rubrik.

5.1.1 Faktorer och produkt

Day och Hurrel (2015) skriver att ett rektangulärt rutnät synliggör multiplikationens delar, faktorer och produkt. Att eleverna har faktorerna och produkten representerad i en modell hjälper dem att förstå multiplikation och att resonera multiplikativt på en ny nivå jämfört med det additiva tänkandet med upprepad addition (s.20). När elever arbetar praktiskt med rektangulära representationsformer kan de manipulera faktorerna och utveckla sin förståelse över sambandet mellan faktorerna. Eleverna lär sig att se relationerna mellan modellens uppbyggnad och den multiplikativa operationen som skrivs med tal och matematiska symboler (Day & Hurrel, 2015, s.20; Abraham & Prediger, 2024, s.238–240). Barmby et al. (2009) menar att faktorerna är möjliga att se och använda men att elever inte alltid själva kan göra kopplingen mellan modellens uppbyggnad och vad den representerar. Av 10 elever som blev tilldelade multiplikationen 11 x 6 kunde endast fyra av dem måla upp rutnätet så att det stämde överens med faktorerna (s.19–20). Abraham och Prediger (2024) är av samma åsikt och förklarar att nyttan av användning av en tvådimensionell modell beror på hur väl eleverna kan se strukturerna inom modellen. De förklarar att eleverna behöver se rader och kolumner som korresponderar med talen i den multiplikativa operationen. De betonar att raderna och kolumnerna är sammansatta enheter och att eleverna behöver se dem som det för att kunna förstå och förklara multipliktiva egenskaper (s.230).

5.1.2 Distributivitet

Distributivitet kan synliggöras i en tvådimensionell modell genom att den rektangulära figuren delas på för att bilda fler mindre rektanglar. Day och Hurrel (2015) visar denna egenskap genom rutnät. Rutnäten delas in i rektanglar som markeras med antalet rader och antalet kolumner inom varje rektangel. Vardera rektangel representerar en egen multiplikativ operation som ska genomföras. Produkterna av rektanglarna adderas och dessa ger den totala produkten. Day och Hurrel (2015) menar att detta är ett meningsskapande och visuellt sätt att förstå distributivitet och talens betydelse inom multiplikation (s.21). I en studie av Maffia och Mariotti (2020) fick eleverna möta distributivitet från den andra änden. Eleverna började med att rita mindre rektanglar för att sedan addera dessa och då få produkten och den stora rektangeln. Dessa rektanglar presenterades på olika sätt men var alltid skalenliga utifrån talen som multiplicerades. De tomma rektanglarna har en potential som kan leda till att eleverna med tiden lär sig att förstå distributivitet och hur de kan använda en rektangulär modell på ett smidigt sätt (s.34).

Maffia och Mariotti (2018) förklarar att ett rutnät kan användas för att lära elever om den distributiva lagen men det kräver att eleverna ser och använder de multiplikativa operationerna som objekt inuti andra operationer (s.34), vilket kan vara en svårighet för dem (s.35). Hurst och Huntley (2020) beskriver hur eleverna i deras studie hade svårt att förstå att den distributiva lagen grundar sig i uppdelning (s.242). Studien visade att många elever tog hjälp av uppdelning av tal (place value partitioning) när de skulle lösa multiplikationer men ändå hade svårt för att känna igen och förklara den distributiva lagen. (s.243). Även Barmby et al. (2009) beskriver hur flera elever hade svårt att använda den distributiva lagen för att beräkna operationer. Hurst och Huntley (2020) menar att det skulle kunna förklaras med att standard algoritmen för multiplikation har lärts ut som en procedur (s.243). Barmby et al. (2009) menar att eleverna behöver stöd för att lära sig hur den distributiva lagen kan appliceras så att de på ett mer effektivt sätt kan utföra beräkningar (s.21). Den tvådimensionella/rektangulära modellen kan ses som ett verktyg för att utveckla en djupare förståelse för den distributiva lagen, (Day & Hurrel, 2015, s.21) samt uppdelning av tal i relation till positionssystemet (Hurst & Huntley, 2020 s.243). Day och Hurrel (2015) menar att när eleverna kan använda ett rutnät som stöd när de möter algoritmer för multiplikativa beräkningar fungerar modellen som en bro för kunskapen och förståelsen (s.21).

Maffia & Mariotti (2018) beskriver hur distributivitet kan vara svårt att synliggöra med ett problem som handlar om olika föremål, exempelvis när olika föremål ska kombineras för att få fram totala antalet möjliga kombinationer. I studien exemplifieras det med ett problem med byxor och olika typer av tröjor. Det är vanligt att, vid ett problem med olika kombinationer, intuitivt tänka att antalet byxor ska multipliceras först med ena typen av tröjor och sedan med den andra typen för att sedan addera dessa två och få det totala antalet kombinationer. Det är mindre intuitivt att först addera alla tröjor för att sedan multiplicera det med antalet byxor och få det totala antalet kombinationer. Jämförs problem som berör olika kombinationer med problem med samma föremål blir det sistnämnda ett bättre exempel att visa distributivitet genom. Ett exempel på ett problem med samma föremål är när priset av 3 lådor ska adderas med priset av 5 lådor vilket kommer ge priset av 8 lådor. Ett pris adderas till ett pris och ger ett nytt pris vilket går att visa distributivt (Maffia & Mariotti, 2018, s.34).

Hurst & Huntley (2020) menar att den rektangulära modellen kan i vissa fall hjälpa elever som har svårt att förstå distributivitet och multiplikation (s.238). Den rektangulära modellen kan hjälpa elever i att förstå och bygga kunskap kring den distributiva lagen om de får möjlighet att se strukturer inom de prickade rutnäten och dela in de i delar som är effektiva att beräkna (Watson, 2016, s.20; Day & Hurrel, 2015, s.21–22). När eleverna möter olika strategier som har använts för att dela upp en multiplikation får de både en möjlighet att utveckla sina multiplikativa resonemang och val av strategier (Watson, 2016, s.20; Day & Hurrel, 2015, s.22) samt förståelse för relationer mellan inlärda multiplikationsfakta (Kosko, 2020, s.755).

5.1.3 Kommutativitet

Maffia och Mariotti (2018) förklarar att symmetrin i den tvådimensionella modellen gör att den kommutativa lagen blir synlig om modellen roteras med 90 grader. Antalet rutor i ett roterat rutnät är desamma som innan rotationen. Skillnaden är nu att figurens rader blir kolumner och kolumnerna blir rader. Förklaringen av kommutativitet med stöd av en tvådimensionell modell med prickar eller rutnät gör att eleverna intuitivt kan acceptera den aritmetiska lagen (s.32). Kosko (2020) menar å andra sidan att tvådimensionella modeller ofta bara visar att lagen om kommutativitet är applicerbar på multiplikation men inte varför lagen gäller (s.753). Kosko (2020) använder ett material som kallas Cuisenaire rods. Cuisenaire rods är stavar som är en centimeter höga och mellan en och tio centimeter långa.

När dessa används för att synliggöra och förklara kommutativitet får eleverna efter ledande frågor av läraren laborera med stavarna. I en modell med tre stavar som är fem centimeter långa ser eleverna att de kan placera fem stavar som är tre centimeter långa ovanpå den första modellen och de täcker samma yta. Kosko (2020) menar att materialet hjälper att visa hur kommutativitet inte endast innebär att talen byter plats. (s.752–753).

Maffia och Mariotti (2018) jämför med den endimensionella modellen och förklarar även de att övertygelsen av kommutativitet inte sker lika intuitivt. I den endimensionella modellen används upprepad addition vilket gör att när vi byter plats på faktorerna kan det vara svårare att förstå att resultatet fortfarande är detsamma (s.32). Även Barmby et al. (2009) menar att den kommutativa lagen är mer uppenbar i en tvådimensionell modell än en endimensionell modell då de menar att den endimensionella modellen är mer kognitivt krävande att förstå (s.8-9).

Bajwa et al. (2023) undersökte hur elever förstår kommutativitet i relation till en tvådimensionell modell och såg då att eleverna inte på egen hand kunde förstå att antalet rader och kolumner förändrades när ett prickat rutnät roterades. Eleverna kunde se att det totala antalet prickar inte förändrades men behövde ledande frågor för att se vad som förändrades i modellen. Därefter såg eleverna att antalet rader och kolumner förändrades. Detta kopplades av en elev till addition eftersom de hade lärt sig att termerna i addition kan byta plats. Eleven förklarade kopplingen till det prickade rutnätet med att talen som står för antalet rader och kolumner byter plats på samma sätt (s.9–11). Även Hurst (2017) redovisar resultat som tyder på att elever har svårt att förklara kommutativitet även om de kan använda lagen korrekt. Endast 1.8% av eleverna i deras studie som bestod av 545 elever kunde förklara den kommutativa lagen med eller utan stöd av en tvådimensionell modell (s.6). Abraham och Prediger (2024) undersöker i sin studie vilket stöd eleverna behöver för att kunna ta sig an multiplikativa uppgifter utifrån en tvådimensionell modell och redovisar att när eleverna fick stöd i form av begrepp och riktade frågor så att de behöll fokus på rätt del, kunde eleverna beskriva kopplingar mellan olika representationer och matematiska uttryck i relation till kommutativitet (s.240). När eleverna fick ord och sätt att beskriva kommutativitet kunde de själva använda dessa för att diskutera kommutativitet både utifrån en modell och ett multiplikativt uttryck. (s.230).

5.2 Elevers användningsstrategier

Forskningsanalysen synliggör olika strategier som används av elever när de möter en tvådimensionell modell för multiplikation. Utifrån analysfråga 2 fann vi i litteraturen två övergripande strategier och dessa presenteras nedan.

5.2.1 Additiva strategier

Flera elever använde additiva resonemang för att göra beräkningar. Barmby (2009, s.15), Lai et al. (2024, s.5-6), Bajwa et al. (2023, s.14-15) och Watson (2016, s.17) förklarar alla hur elever har på olika sätt resonerat med hjälp av addition. Barmby et al. (2009) förklarar att på grund av modellens utformning har det resulterat i att elever grupperade prickarna utan åtanke på faktorerna och adderade sedan grupperna. Eleverna skulle räkna ut produkten och hade ett redan uppdelat rutnät som hjälp. Rutnätet var uppdelat i grupper om 25 prickar. Eleverna ordnade om prickarna så att de var enklare att beräkna men det gjorde att den multiplikativa strukturen förändrades så att faktorerna inte längre stämde överens med uttrycket (s.15–16). Bajwa et al. (2023) gav eleverna i uppgift att beräkna det totala antalet rutor i en figur utan att eleverna skulle räkna varje ruta för sig. Några elever räknade hur lång raden eller kolumnen var och använde sedan den informationen för att addera upprepade gånger eller räkna med 10- eller 6-hopp. Någon elev dubblerade och adderade kolumner för att beräkna det totala antalet rutor. De strategierna är av additiv grund och synliggör inte alla multiplikativa strukturer i rutnätet (s.14–15). Det finns elever som inte ser några strukturer i modellerna och istället räknar alla prickar eller rutor. I en studie av Lai et al. (2024) där 163 elever i årskurs 5 tittade på prickade rutnät visade det sig att en femtedel av eleverna räknade alla prickar (s.6–7). Finesilver (2017) beskriver i sin studie hur alla elever, vid första mötet av en tredimensionell modell använde sig av en räknebaserad strategi där alla dessutom gav ett felaktigt svar (s.104). Två av eleverna kunde senare, genom enhetsmetoden, komma fram till antalet kuber i en modell med dimensionerna 3*4*5 genom att räkna det översta lagret (4*5) och addera det tre gånger (s.105,109). Överlag använde sig eleverna av grupperingar, rytm- och stegräkning samt upprepad addition (s.109). En underkategori inom additiva strategier är subitisering vilket innebar att eleverna såg antalet prickar i modellerna utan att räkna dem. Subitisering var en av de strategier som Lai et al. (2024) identifierade i sin studie. Denna strategi gjordes endast synlig i de fall där prickarna i en rad eller en kolumn var färre än fem (s.5). I ett tidigt stadie av Bajwa et al. (2023, s.8) studie var det flera elever som subitiserade delar av modellerna. Eleverna såg olika grupper inom rutnäten och adderade samman grupperna.

Likt Lai et al. (2024, s.5) gjorde eleverna detta i situationer där rutnätens rader och kolumner innehöll färre än fem prickar (Bajwa et al, 2023, s.8).

5.2.2 Multiplikativa strategier

I flera exempel på elevstrategier där eleverna använder multiplikativa resonemang har eleverna använt modellens rader och kolumner för att antingen beräkna det totala antalet prickar eller rutor eller för att rita upp en representation av en specifik multiplikativ operation. Eleverna ser kolumnen som den ena faktorn och raden som den andra faktorn och kan därefter utföra den multiplikativa beräkningen (Watson, 2016, s.17; Lai et al., 2024, s.5–6; Schroeder och Götze 2025, s.6–7; Barmby et al., 2009). Även Bajwa et al. (2023) presenterar elevförklaringar där eleverna har multiplicerat raden med kolumnen för att få det totala antalet rutor. Eleverna har genom arbete med en tvådimensionell modell börjat se de multiplikativa strukturerna och ser och använder rader och kolumner som sammansatta enheter (s.15). Liknande visar Barmby et al. (2009) hur eleverna använder multiplikativa strategier och resonemang när de tar sig an uppgifter i ett prickat rutnät. Flera elever använder den distributiva lagen genom att dela upp rutnätet i flera mindre grupperingar där rad och kolumn multipliceras. Dessa produkter adderas vilket ger den totala produkten (s.14). Maffia och Mariotti (2020) visar elevexempel där eleven representerar beräkningen med rektanglar utan att fylla i rader eller kolumner. Rektanglarna är skalenliga utifrån faktorerna. Eleven skriver operationen med tal och symboler inuti rektangeln och använder endast rektangeln som stöd (s.34). Abraham och Prediger (2024) lät eleverna svara på frågor och fick delvis tydliga matematiska resonemang som svar. Eleverna använde matematiska begrepp som *rad* och *kolumn* samt orden *om* och *då* för att beskriva förändringar i en tvådimensionell modell och dess tillhörande uttryck (s.238).

6. Diskussion

I metoddiskussionen diskuteras metoden för urval och analys av litteratur. Under resultatdiskussionen diskuteras resultaten i relation till studiens syfte och bakgrund. Bland annat diskuteras elevernas användningsstrategier i relation till möjligheten att utveckla multiplikativa resonemang och hur väl de multiplikativa strukturerna synliggörs.

6.1 Metoddiskussion

Av alla 736 sökträffar som dök upp i Google Scholar lästes endast de 40 första. Det kan ha lett till att vi har missat artiklar som skulle ha inkluderats utifrån studiens inkluderingskriterier. Sökmotorns algoritmer och dess sortering är okänt, vilket kan betyda att artiklar efter de 40 första likaväl hade kunnat vara passande till resultatet och därför är detta en aspekt som påverkar resultatet.

Dessutom gjordes avgränsningen för årtal. Avgränsningen gjordes från år 2022 vilket är senare än de avgränsningar som applicerats på sökningar vid andra databaser. Eftersom Google Scholar ger en väldigt stor träffmängd valde vi att avgränsa från årtalet för att minska träffmängden och för att prioritera nyare forskning för att få en blick över det aktuella forskningsläget. Avgränsningen kan ha påverkat resultatet eftersom artiklar mellan 2015 och 2021 missats. Detta innebär att vi kan ha gått miste om forskning som berör området. Denna avgränsning har dock gett oss artiklar som framställer forskningsläget från de senaste åren vilket har bidragit till studien.

Valen och användningen av sökblock kan ha påverkat resultatet eftersom olika sökblock har använts vid sökningarna. Flera sökningar med olika konstellationer av sökord har gjorts som ej genererade artiklar vilket är anledningen till de varierade sökblocken. Om ett specifikt sökblock istället använts på alla databaser kunde vi säkerställa dubbletter och att vi i alla databaser har fått träffar som verkligen berör samma innehåll. Variationen av sökblocken kan ha en påverkan på resultatet då artiklar eventuellt missats på grund av ordvalen.

Något som ytterligare påverkade resultatet var valet av sökord, och specifikt avsaknaden av ordet associativitet eller den associativa lagen i söktabellen (se rubrik 4.3). Då vi efter de första sökningarna inte identifierade några artiklar som nämnde associativitet gjorde vi ytterligare sökningar med fokus på lagen i relation till en tvådimensionell modell. Vi fann inget resultat som omfattades av inkluderingskriterierna. För att inkludera artiklar om associativitet skulle inkluderings- och exkluderingskriterier behöva förändras och fokusområdet skulle inte längre vara lika nära de tvådimensionella modellerna. Detta skulle då påverkat resultatets riktning.

Materialanalysen utfördes utifrån analysfrågor som fokuserade på multiplikativa strukturer, elevstrategier och resonemang. Detta har en påverkan på resultatet då det har riktat oss mot de aspekterna vilket innebär att andra aspekter kan ha fått ett mindre utrymme. Frågorna har gjort att arbetet kunde struktureras upp genom två tydliga övergripande teman som bidrar till att besvara syfte och frågeställningar. Analysen genomfördes genom gemensam läsning vilket gynnar studien då uppfattningar diskuterades för att säkerställa att innehållet inte missuppfattades.

6.2 Resultatdiskussion

Nedan diskuteras hur den tvådimensionella modellen används och kan användas för att utveckla elevers multiplikativa resonemang och förståelse för multiplikativa strukturer och egenskaper.

6.2.1 Multiplikativa resonemang

Resultatet visar att det är möjligt att nästan helt undkomma de multiplikativa resonemangen när man arbetar med tvådimensionella modeller. I Barmby et al. (2009) studie kunde eleverna helt bortse från faktorerna när de skulle gruppera och beräkna produkten. Likaså visar Finesilver (2017, s.105) Bajwa et al. (2023, s.15) och Lai et al. (2024, s.5-6) hur elever inte använder multiplikativa resonemang utan resonerar utifrån addition. Detta visar på att modellen i sig inte är tillräcklig för att eleverna ska kunna utveckla multiplikativa resonemang. Abraham och Prediger (2024) nämner vikten av att se sammansatta enheter och strukturer inom en tvådimensionell modell (s.230). Även Larsson (2016) nämner denna förmåga som en grundläggande princip för att förstå och resonera multiplikativt (s.4). I resultatet framställs flera artiklar där eleverna i flera fall har räknat alla prickar eller rutor vilket kan bero på att de inte ser dessa sammansatta enheter inom modellerna. För att få eleverna att se dessa menar Abraham och Prediger (2024) att eleverna behöver stöd och stöttning (s. 240). Även Barmby et al. (2009) som visade flera fall av elevstrategier som grundades på räkning (s.12), nämner att eleverna, eftersom de inte har en förståelse för modellens uppbyggnad, inte kan förstå hur modellen representerar multiplikation. Barmby et al. (2009) fortsätter och påpekar, som Abraham och Prediger (2024, s.241), att det behövs stöttning för att eleverna ska se strukturerna som finns i en tvådimensionell modell (s.20). Resultatet tyder således på att det finns möjligheter för eleverna att lära sig att se strukturer inom en tvådimensionell modell men att det även är en svårighet för eleverna att upptäcka strukturerna och använda dem. Finesilvers (2017) resultat visade att elever tog sig an uppgifter genom att räkna utan multiplikativa resonemang (s.105) och därför diskuteras att en interaktion med visuella medel kan vara gynnsamt för att eleverna och deras medvetenhet kring dem (s.110). Medvetenhet är viktig då den kan hjälpa elever i att göra smarta val kring hur modellen ska användas. Exempelvis kan en elev, beroende på hur den föredrar att räkna med en uppräkningsstrategi, välja om den ska fokusera på lager eller kolumner (s.111).

Flera artiklar (Watson, 2016; Schroeder & Götze, 2025; Bajwa et al., 2023; Lai et al., 2024; Maffia & Mariotti, 2020) visar exempel på situationer där eleverna använder multiplikativa strategier för att ta sig an multiplikativa operationer med tvådimensionella representationsformer. I flera av fallen (Bajwa et al., 2023; Maffia & Mariotti, 2020) är det tydligt att eleverna får stöd och ledning till att hitta begreppen, se strukturerna och att göra kopplingar mellan olika representationsformer. Larsson (2016) har konstruerat en modell för att bedöma hur väl eleverna gör kopplingar mellan olika multiplikativa strukturer vilket i sin tur ger en bild över var eleverna befinner sig i sin utveckling. I modellen finns kopplingar mellan val av modell, användning av aritmetiska lagar och vilka resonemang som används (s.29). Utifrån denna modell kan elevstrategier från den analyserade litteraturen mätas och jämföras. Alla elever använder en tvådimensionell modell men resonerar på olika sätt och få av eleverna använder någon av de aritmetiska lagarna för att beräkna uppgiften eller för att förklara resultatet om de inte blivit specifikt riktade mot användning av dem. Det blir därmed synligt att det finns en utvecklingspotential i arbetet med tvådimensionella modeller så att eleverna får möjlighet att förstå de multiplikativa strukturerna.

6.2.2 Kommutativitet eller distributivitet

Resultatet visar att både kommutativitet och distributivitet är möjligt att förklara med hjälp av en tvådimensionell modell men att introducera den distributiva lagen i en tvådimensionell modell verkar kunna bidra mer till elevernas utveckling av multiplikativa resonemang. Hurst och Huntley (2020) förklarar att lära sig den distributiva lagen genom en tvådimensionell modell leder eleverna mot mer abstrakt tänkande och en djupare förståelse för standardalgoritmen för multiplikation (s.241). Även Maffia och Mariotti

(2020) diskuterar hur en rektangulär modell kan synliggöra den distributiva lagen och verka som ett hjälpmedel för eleverna när de i senare skolår möter standardalgoritmer och flersiffriga faktorer (s.37). Även Day och Hurrel (2015) beskriver hur ett rutnät tydligt framhäver den distributiva lagen och möjligheten att förstå standardalgoritmer (s.22). Modellen ger således eleverna möjligheter att dra kopplingar mellan olika representationsformer för multiplikation vilket flera artiklar förklarar som viktigt (Larsson, 2016; Tzur et al., 2013; Barmby et al., 2009; Lai et al., 2024; Maffia & Mariotti, 2018).

6.2.3 Associativitet

Associativitet är en aritmetisk lag som berör multiplikation men den nämns inte i artiklarna som har analyserats. En tvådimensionell modell verkar därför inte vara en passande representation för associativitet. Eftersom associativitet innebär att det inte spelar någon roll vilken operation man väljer att börja räkna om den finns fler än två inom addition eller multiplikation blir den tvådimensionella modellen svår eftersom den endast visar två faktorer, raden och kolumnen. Larsson (2016) förklarar att anledningen till att det inte finns så mycket forskning om associativitet och elevers förståelse för den, speciellt i de tidiga årskurserna, är för att elever sällan möter fler än två faktorer i multiplikation (s.18).

Om en liknande modell ska användas för att lära eleverna om associativitet skulle det kunna vara en tredimensionell modell eftersom vi då har höjden som en faktor, bredden som en annan faktor och djupet som en tredje faktor. Oavsett vilka två som multipliceras först kommer produkten vara densamma. Finesilver (2017) diskuterar rätblock som tredimensionella modeller för multiplikation och förklarar att förmågan att använda flera sorters modeller ger en flexibilitet i hanteringen av modellerna och möjligheter att utveckla sin förståelse för de aritmetiska lagarna (s.111).

6.3 Undervisningsimplikationer

Forskningen visar att det finns många möjligheter med en tvådimensionell modell men att det krävs en medvetenhet hos läraren för att eleverna ska se och förstå de multiplikativa strukturerna. Maffia & Mariotti (2018) menar att en presentation av flera modeller är bra för elevers förståelse men då är det viktigt att bygga en bro och göra kopplingar mellan de olika modellerna. Lai et al. (2024) resonerar på likande sätt, elever behöver bygga grundläggande kunskaper om multiplikation för att kunna göra kopplingar mellan olika representationer (s.7). Även Barmby et al. (2009) föreslår att använda flera representationer och göra kopplingar mellan dem för att ge eleverna en djupare förståelse av multiplikation (s.22). Detta kan kopplas väl till Larssons (2016) tankar om kopplingar mellan aspekter för att utveckla en god förståelse för multiplikation (s.29). Maffia & Mariotti (2020) påstår att endast väl utvalda uppgifter inte behöver betyda att elever kan hitta kopplingar mellan strategier. Eleverna har en tendens att göra slumpmässiga kopplingar och det är därför viktigt att en kunnig lärare är närvarande och fångar upp elevers idéer och tankar och styr dem mot kopplingar mellan representationerna (s.38). Ett exempel på det finns i Bajwa et al. (2023) studie där en undervisningssekvens beskrivs. Läraren beskriver och problematiserar tillsammans med eleverna vad en rektangulär modell är och hur de ska se ut. De jämförde med asymmetriska prickade rutnät och diskuterade vad som var möjligt att se i de olika modellerna och hur väl de kunde användas för beräkningar (s.11–13). Detta tyder således på vikten av diskussion och reflektion tillsammans med eleverna. När eleverna får sätta ord på tankar kan de möjligtvis utveckla mer kunskap och genom det förstå viktiga aspekter inom multiplikation.

6.4 Vidare forskning

Ämnen som skulle vara intressanta för framtida forskning är hur associativitet kan visualiseras och användas som stöd för multiplikation med flera operationer. Det skulle även vara intressant att forska kring hur tvådimensionella modeller används i Norden eftersom den forskning vi har analyserat och kommit åt främst kommer från andra länder och världsdelar. Utöver det skulle det vara intressant att undersöka om den rektangulära modellen kan vara ett hjälpmedel för specifika problem som inte är lika lätta att synliggöra med en rektangulär modell, ett exempel på det är kombinatoriska problem.

Referenslista

Abraham, M., Prediger, S. (2024). Scaffolding fifth graders' learning with a digital multi-representation applet: design research on focusing multiplicative structures with dynamic dot arrays. *Digital Experiences in Mathematics Education 11*(2), s.219-246. https://doi.org/10.1007/s40751-024-00156-7?urlappend=%3Futm_source%3Dresearchgate.net%26utm_medium%3Darticle

Bajwa, N.P., Tobias, J.M., & Lawton, C. (2023). Children´s conceptions on the structure of an array: Using quick images as a gateway on multiplicative ideas. *Journal of Mathematics Behavior*, 69(101049). https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101049

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), s.217-241. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9145-1

Carpenter, T.P., Franke, M.L., Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school.* Heinemann.

Day, L., Hurrell, D. (2015). An explanation for the use of arrays to promote the understanding of mental strategies for multiplication. *Australian Primary Mathematics Classroom 20*(1), s.20-23. ERIC - EJ1093229 - An Explanation for the Use of Arrays to Promote the Understanding of Mental Strategies for Multiplication, Australian Primary Mathematics Classroom, 2015

Eriksson Barajas, K., Forsberg, C., Wengström, Y. (2013). *Systematiska litteraturstudier i utbildningsvetenskap – vägledning vid examensarbeten och vetenskapliga artiklar.* Natur & Kultur.

Finesilver, C. (2017). Between Counting and Multiplication: Low-Attaining Students' Spatial Structuring, Enumerations and Errors in Concretely-Presented 3D Array Tasks. *Mathematical Thinking and Learning 19*(2), s.95-114. https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1295418

Grevholm, B. (Red.). (2014). *Lära och undervisa Matematik från förskoleklass till åk 6*. Studentlitteratur.

Gustafsson, B., Hermerén, G., Petersson, B. (2005). *Vad är god forskningssed? Synpunkter, riktlinjer och exempel.* Vetenskapsrådet. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:255775/FULLTEXT01.pdf

Harries. T., Barmby. P. (2007). Representing and understanding multiplication. *Research in Mathematics Education,* 9(1), s.33-45. https://doi-org.proxy.library.ju.se/10.1080/14794800008520169

Hurst, C. (2017). Children Have the Capacity ti Think Multiplicatively, as long as … *European Journal of STEM Education*, *2*(3), s.1-14. https://doi.org/10.20897/ejsteme/78169

Hurst, C., Huntley, R. (2020). Distributivity, portioning, and the multiplication algorithm. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, *5*(3), s.231-246. https://doi.org/10.23917/jramathedu.v5i3.10962

Jacob, L. Mulligan, J. (2014). Using Arrays to Build towards Multiplicative Thinking in the Early Years. *Australian Primary Mathematics Classroom, 19*(1), s.35-40. https://www.proquest.com/eric/docview/1826526066/abstract/F9C7A3366C5E4AB6PQ/1?accountid=11754&sourcetype=Scholarly%20Journals

Jäder, J. (2015) *Elevers möjligheter till lärande av matematiska resonemang*. [Licsensavhandling, Linköpings Universitet] https://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:813138/FULLTEXT01.pdf

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM.

Kosko, K. (2020). Using arrays for meaningful multiplication. *Mathematics Teacher: Learning & Teaching PK-12, 113*(9), s.751-755. https://doi.org/10.5951/MTLT.2020.0061

Lai, J., Baumanns, L., Simon, A. L., Lilienthal, A. J., Schindler, M. (2024, Jan 25). *Exploring students' understanding of multiplication with eye tracking: A study on the use of strategies in array representations* [Paper presentation]. Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Budapest, Hungary. https://hal.science/hal-04416526

Larsson, K. (2015). Multiplikationsundervisning. *Nämnaren: en tidskrift för matematikundervisning, 1*, s.9-13. 0913_larsson.indd

Larsson, K. (2016). *Students' understandings of multiplication*. [Doktorsavhandling, Stockholm University]. DiVa. https://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1038458

Larsson, K. (2024). Rektanglar som tankeredskap. *Nämnaren: tidskrift för matematikundervisning*, Nr.3, s.25–31. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2025/09/2531_24_3.pdf

Lawton, A. (1994). Research on the acquisition of science knowledge: Epistemological foundations of cognition. I D. Gabel (Red.), *Handbook of Research on Science Teaching and Learning.* (s.131-176). Macmillan publishing company.

Maffia, A., Mariotti, M. A. (2020). From action to symbols: giving meaning to the symbolic representation of the distributive law in primary school. *Educational Studies in Mathematics 104*, 25-40. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09944-5

Maffia, A., Mariotti, M. A. (2018). Intuitive and formal models of whole number multiplication: relations and emerging structures. *For the Learning of Mathematics 38*(3), 30-36. FLM

McIntosh, A. (2020). *Förstå och använda tal – en handbok.* Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM.

Matney, G.T., Dougherty, B.N. (2013). Seeing Spots and Developing Multiplicative Sense Making. *Mathematics Teaching in the Middle*, *19*(3), s.148–155. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.19.3.0148

Sayers, J., de Ron, A. (2015). Subitisering. *Nämnaren: tidskrift för matematikundervisning,* 1 s.3–7. https://ncm.gu.se/pdf/namnaren/0307_15_1.pdf

Schroeder, K., Götze, D. (2025, Oct 6). *Fostering the unitizing concept in array representations by interpreting unconventional terms* [Paper presentation]. Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Bozen-Bolzano, Italy. https://hal.science/hal-05299141

Skodras, C. (2016). Muffles' truffles – undervisning i multiplikation med systematiskt varierande exempel. *Nämnaren: en tidskrift för matematikundervisning,2, s.*13–*19.* https://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1319_16_2.pdf

Skolverket. (2022). Kommentarmaterial till kursplanen i matematik. Skolverket. https://www.skolverket.se/download/18.68c99c081804c5929ea1386/1652438720628/pdf9790.pdf

Skolverket. (2025). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet.* Skolverket. Ladda ned publikation - Skolverket

Smith, J. P. (2018). *Learning from NAEP Released Items: U.S. Elementary Students' Grasp of Multiplicative Relationships.* North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. http://proxy.library.ju.se/login?url=https://www.proquest.com/eric/speeches-presentations/learning-naep-released-items-u-s-elementary/docview/2459008651/sem-2?accountid=11754

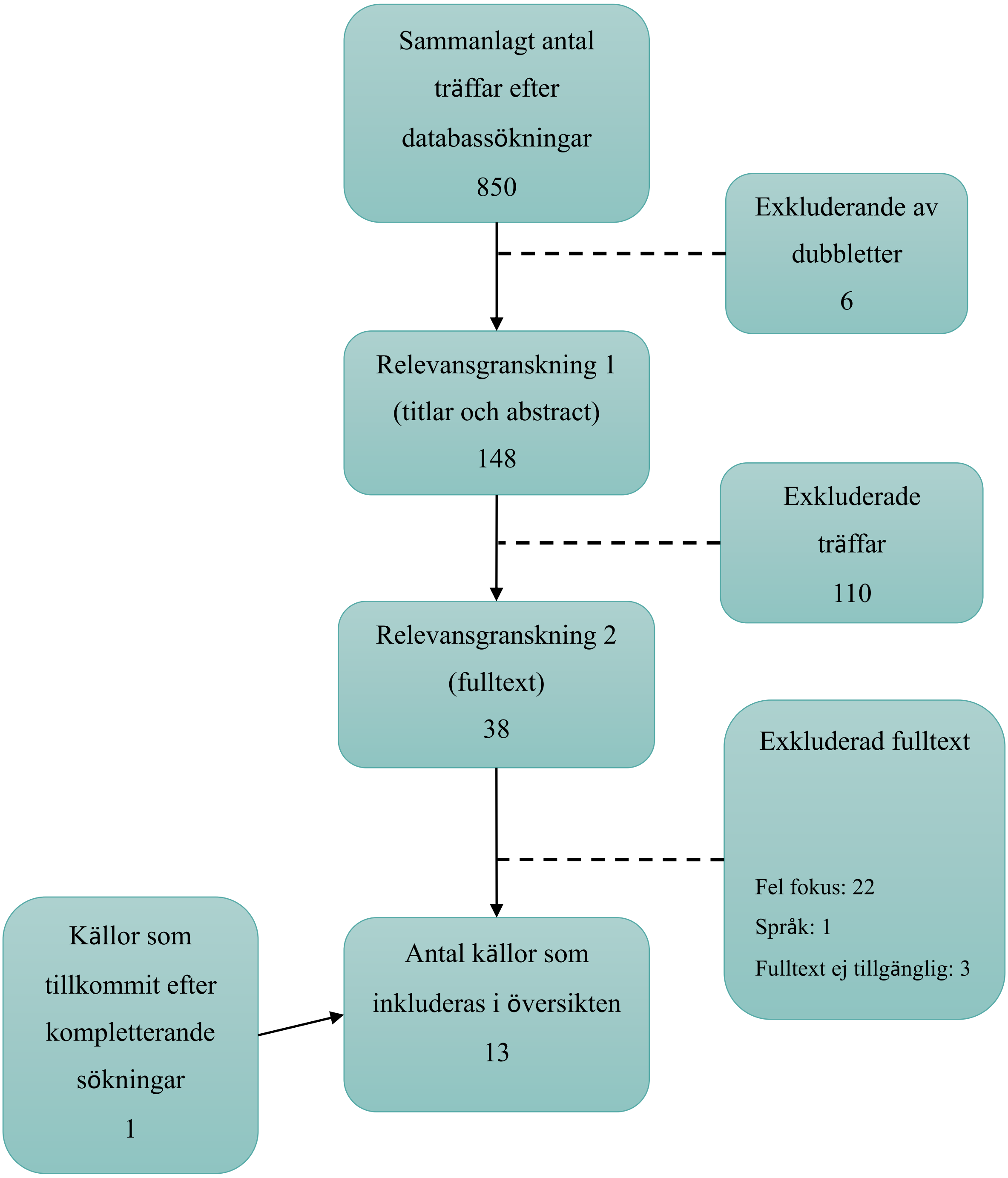
Tzur, R., Johnson, H. L., McClintock, E., Kenney, R. H., Xin, Y. P., Si, L., Woordward, J., Hord, C., Jin, X. (2013). Distinguishing schemes and tasks in children's development of multiplicative reasoning. *PNA, 7*(3), 85-101. http://proxy.library.ju.se/login?url=https://www.proquest.com/eric/scholarly-journals/distinguishing-schemes-tasks-children-s/docview/1697490308/sem-2?accountid=11754

Vetenskapsrådet. (2024). *God forskningsed 2024.* https://www.vr.se/analys/rapporter/vara-rapporter/2024-10-02-god-forskningssed-2024.html

Watson, K. (2016). Laying the foundation for multiplicative thinking in year 2. *Australian Primary Mathematics Classroom 21*(3) 16-20). ERIC - EJ1115054 - Laying the Foundation for Multiplicative Thinking in Year 2, Australian Primary Mathematics Classroom, 2016

Bilagor

Bilaga 1: Diagram över urvalsprocessen



Bilaga 2: Översikt över analyserat material

Författare **Titel** **Publikationsår**	**Syfte**	**Land** **Design** **Datainsamling**	**Resultat**	**Vilka multiplikativa strukturer nämns?**	**Hur resonerar eleverna utifrån modellen?**
Abraham, M., Prediger, S. Scaffolding fifth graders' learning with a digital multi-representation applet: design research on focusing multiplicative structures with dynamic dot arrays. 2024	Syftet med studien är att undersöka hur elever i årskurs 5 kan utföra och förklara omvandlingar mellan representationer medan de utforskar och laborerar med prickade rutnät samt vilka uppgifter och stöttningar som gynnar elevernas utvecklingsprocess.	Tyskland. Empirisk studie. 14 elever mellan 10 och 11 år gamla.	Studien drar slutsatsen att användning av rutnätsrepresentationen som används i programmet kan bidra till att eleverna utvecklar en förmåga att se sammansatta enheter om eleverna får förklara omvandlingar när de arbetar med uppgifter som ger stöd för bland annat begrepp.	De multiplikativa strukturer som nämns är sammansatta enheter och kommutativitet.	Eleverna resonerar till stor del multiplikativt tack vare stöttningarna som riktade eleverna mot de multiplikativa strukturerna inom en tvådimensionell modell.
Bajwa, N.P., Tobias, J.M., & Lawton, C. Children´s conceptions on the	Syftet med studien är att undersöka hur Quick Images kan stödja elevers förståelse för tvådimensionella	USA. Empirisk studie. 20 elever i årskurs 2.	Studiens resultat visar användandet av Quick Images är lämpliga för att utveckla resonemang och förmågan att se	De multiplikativa strukturer som nämns är kommutativitet och rader och kolumner.	Eleverna resonerar på olika sätt, både multiplikativt och additivt.

structure of an array: Using quick images as a gateway on multiplicative ideas. 2023	modeller som multiplikativa strukturer.		grupper inom tvådimensionella modeller.		
Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. 2009	Studiens syfte är att undersöka barns resonemang och användning av prickade rutnät som representation vid multiplikativa uträkningar.	Storbritannien. Empirisk studie Datorinspelningar från elevers användning av program från Flash Macromedia. 34 elever mellan 8 och 11 år gamla.	Studiens resultat var att prickade rutnät som representerar multiplikation kan stötta elevers beräkningsstrategier. Dock upptäcktes flera svårigheter. Slutsatsen var att modellen är användbar om eleverna får stöd av lärare.	De strukturer som nämns är faktorernas betydelse och den distributiva lagen.	Eleverna resonerar på flera sätt. En del elever resonerar multiplikativt samtidigt som andra elever resonerar additivt.
Day, L., Hurrell, D. An explanation for the use of arrays to promote the understanding of	Studiens syfte är att diskutera hur eleverna ska utveckla en förståelse för varför multiplikation fungerar som den gör och inte bara hur det	Australien. Teoretisk studie.	Resultatet visar att tvådimensionella modeller ger elever en djup förståelse för multiplikation och en förmåga att enklare göra	De strukturer som nämns är distributivitet, kommutativitet och faktorernas betydelse.	Inga elevexempel.

mental strategies for multiplication. 2015	fungerar, så att eleverna ska kunna använda multiplikation flytande både i huvudräkning och skriftliga beräkningar.		kopplingar mellan representationsformer vilket kommer underlätta för eleverna i senare skolår.		
Finesilver, C. Between Counting and Multiplication: Low-Attaining Students' Spatial Structuring, Enumerations and Errors in Concretely-Presented 3D Array Tasks. 2017	Artikelns syfte är att undersöka hur lågpresterande elever arbetar med multiplikation när de möter tredimensionella modeller.	Storbritannien. Empirisk studie. 13 elever mellan 11 och 15 år gamla.	Det är viktigt att undervisningen lyfter fram strukturer i modellen, använder konkreta representationer och att modellen är bra för att elever ska gå från uppräkning till multiplikativa resonemang.	De strukturer som nämns är rader och kolumner och därmed lager som bildas av raderna och kolumnerna.	Eleverna resonerar genom uppräkningsstrategier utan att använda multiplikation.
Hurst, C. Children have capacity to think multiplicatively as long as... *European Journal of STEM Education,* 2017	Studiens syfte är att utforska elevernas möjlighet att tänka multiplikativt och göra kopplingar inom multiplikation för att förklara multiplikativa strukturer och hur	Australien. Empirisk datainsamling. 545 elever mellan 9 och 11 år gamla.	Resultatet tyder på att eleverna har möjligheten att nå en hög kunskapsnivå men sällan gör det. De kan förstå delar av de multiplikativa strukturerna men har ofta svårt att se och göra	De strukturer som nämns i studien är kommutativitet, faktorer och sammansatta enheter.	Eleverna resonerade på olika sätt varav några resonerade multiplikativt och förklarade kopplingar mellan multiplikativa strukturer. Vissa elever visade inte denna förmåga

	omfattande lärarnas kunskap kring multiplikativa koncept är.		kopplingar mellan dem. Flera av lärarna har också en kunskap som brister när det handlar om kopplingar mellan multiplikativa koncept.		och kunde inte resonera multiplikativt.
Hurst, C., Huntley, R. Distributivity, partitioning, and the multiplication algorithm. Journal of Research and Advances in Mathematics Education. 2020.	Syftet med studien är att besvara frågeställningen om i vilken utsträckning grundskoleelever korrekt kan använda en skriftlig multiplikativ algoritm och påvisa en konceptuell förståelse för matematiken som bygger upp den.	Storbritannien. Empirisk datainsamling. 36 elever mellan 9 och 11 år gamla.	Resultatet visar att elever förstår matematiken på olika sätt, några elever visar full förståelse för och möjlighet att hantera en skriftlig metod för multiplikation medan andra elever inte visar förståelse eller förmåga att använda en skriftlig metod. De framför även att en tvådimensionell modell är ett medel som hjälper eleverna att förstå den distributiva lagen.	De multiplikativa strukturer son nämns är distributivitet och uppdelning av tal	Flera elever använder multiplikativa resonemang när de förklarar varför multiplikativa uttryck är korrekta.

Kosko, K. Using arrays for meaningful multiplication. 2020	Artikelns syfte är att illustrera ett tillvägagångssätt för att uppmuntra elever till att inte enstegsräkna och att upplyfta meningsfulla sätt att förstå multiplikation med hjälp av Cuisenaire Rods.	USA. Empirisk studie. Elever i årskurs 3.	Artikelns slutsats är att materialet kan användas för att elever inte ska enstegsräkna samt att materialet synliggör multiplikativa egenskaper.	De strukturer som nämns är distributivitet och kommutativitet.	Eleverna resonerar på olika sätt, de förklarar förändringar i modellen som att delar adderas samtidigt som de resonerar multiplikativt kring kopplingar mellan strategier.
Lai, J., Baumanns, L., Simon, A.L., Lilienthal, A.J., Schindler, M. Exploring students' understanding of multiplication with eye tracking: A study on the use of strategies in array representations. Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.	Syftet med studien är att undersöka elevers strategier när de arbetar med multiplikativa uppgifter inom en tvådimensionell modell.	Ungern. Empirisk datainsamling av ögonspårning med systemet Tobii Pro X3-120. 163 elever mellan 9,8 och 12,8 år gamla.	Resultatet visar att eleverna använde tre huvudsakliga strategier för att lösa uppgifterna. Slutsatsen som dras är att flera elever inte har en förståelse över en tvådimensionell representation av multiplikation då de inte ser de multiplikativa strukturerna.	De multiplikativa strukturerna som nämns är rader och kolumner.	Eleverna tog sig ann uppgifterna på olika sätt varav flera använda additiva strategier och således inte är nära de multiplikativa resonemangen.

2024					
Maffia, A., Mariotti, M. A. Intuitive and formal models of whole number multiplication: relations and emerging structures. For the learning of mathematics. 2018	Syftet med studien är att jämföra upprepad addition och en rektangulär modell utifrån den underliggande matematiken för att klargöra de didaktiska implikationerna för vardera modell.	Italien. Teoretisk studie.	Resultatet visar att modellerna synliggör de matematiska strukturerna men är mer eller mindre användbara i olika situationer. För att uppnå förståelse för multiplikation borde flera representationer användas och jämföras i undervisningen.	De multiplikativa strukturer som nämns är faktorer, kommutativitet, distributivitet och kartesisk produkt.	Inga elevexempel.
Maffia, A., Mariotti, M. A. From action to symbols: giving meaning to the symbolic representation of the distributive law in primary school. Educational studies in Mathematics.	Hur förstår elever den distributiva lagen utifrån en rektangulär representation och vad påverkar deras förståelse?	Italien. Empirisk studie. 20 elever mellan 7 och 8 år gamla.	Resultatet visar att lärarens spelar stor roll för hur väl eleverna förstår den aritmetiska lagen. Läraren behöver fånga upp elevernas tankar och signaler för att bygga vidare på dem och använda dessa i undervisningen.	Den multiplikativa strukturen som nämns är den distributiva lagen.	Eleverna resonerar multiplikativt utifrån de tvådimensionella modellerna.

2020.			Tvådimensionella modeller kan synliggöra förhållandet mellan aritmetiska symboliska uttryck.		
Schroeder, K., Götze, D. Fostering the unitizing concept in array representations by interpreting unconventio nal terms. Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Educatio n. 2025.	Studiens syfte är att besvara hur elevers uppmärksamhet kan riktas till att se olika sammansatta enheter inom en tvådimensionell representation.	Italien. Empirisk studie. 15 elever i årskurs 2.	Studien drar slutsatsen att elever ofta tittar förhastat på de tvådimensionella representationerna men med stöd kan blickarna riktas mot de sammansatta enheterna inom modellen.	De multiplikativa strukturer som nämns är sammansatta enheter.	Eleverna resonerade på olika sätt, de använde delvis multiplikativa resonemang.

Watson, K. Laying the foundation for multiplicative thinking in year 2. 2016	Syftet med studien är att ge eleverna upplevelser, modeller, strategier och diskussioner som utvecklar deras multiplikativa tänkande.	Australien. Empirisk studie. En elevklass i årskurs 2.	Studiens resultat visar att när eleverna fick lära sig om strategier, strukturer och fick möjligheten att visualisera den tvådimensionella modellen utvecklades deras multiplikativa tänkande.	De strukturer som nämns är sammansatta enheter och den distributiva lagen.	Eleverna resonerar delvis multiplikativt och delvis additivt.